

含接触界面的叶盘结构强迫振动响应快速预测方法

阳刚^{1,2}, 周标¹, 臧朝平¹

(1. 南京航空航天大学 能源与动力学院

航空发动机热环境与热结构工业和信息化部重点实验室, 南京 210016;

2. 北京动力机械研究所 激光推进及其应用国家重点实验室, 北京, 100074)

摘 要: 建立了含接触界面的叶盘有限元结构强迫振动响应的快速预测方法。以含燕尾型榫连接的叶盘结构有限元(FE)模型为例,通过模态综合法对线性结构模型进行减缩,将模型计算规模降低至原模型的1/25以下,采用谐波平衡法对进行稳态响应预测。在此过程中,将作者前期研究工作中提出的雅可比矩阵加速技术进行拓展改进,形成了适用于含接触界面的大规模有限元模型的快速雅可比矩阵快速计算方法,将基于谐波平衡法的响应预测速率提高400倍以上。结果表明:所建立的含接触界面的叶盘结构强迫振动响应快速预测方法准确性良好,在计算效率方面拥有巨大的优势,可为后续开展各种类型干摩擦阻尼器的设计和优化工作提供强有力的工具。

关 键 词: 叶盘结构; 响应预测; 干摩擦阻尼; 模型减缩; 谐波平衡法(HBM)

中图分类号: V231.92

文献标志码: A

Fast response prediction method for bladed disks with contact interfaces

YANG Gang^{1,2}, ZHOU Biao¹, ZANG Chaoping¹

(1. Aero-engine Thermal Environment and Structure Key Laboratory of Ministry of Industry and Information Technology, College of Energy and Power Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;

2. State Key Laboratory of Laser Propulsion and Application, Beijing Power Machinery Institute, Beijing 100074, China)

Abstract: A fast prediction method for forced vibration response of bladed disks with contact interfaces was established. This method was exemplified by applying it into a finite element (FE) model of a bladed disk with dovetail joints. The linear part of the finite element model was reduced by means of the modal synthesis method. A reduced model with the total amount of the generalized degree-of-freedom less than 1/25 that of the full model was set up. Forced response was predicted by employing the harmonic balance method. In this process, the Jacobian acceleration technique proposed in previous research effort was reformulated and improved. It evolved into a improved and fast Jacobian-evaluation method suit-

收稿日期: 2019-01-31

基金项目: 国家自然科学基金(51405460); 江苏省自然科学基金(BK20161485)

作者简介: 阳刚(1994—),男,硕士生,研究方向为航空发动机结构动力学。

通信作者: 周标(1984—),男,副教授,博士,研究方向为航空发动机结构动力学。E-mail: biao.zhou@nuaa.edu.cn

引用格式: 阳刚,周标,臧朝平. 含接触界面的叶盘结构强迫振动响应快速预测方法[J]. 航空动力学报,2019,34(9):1953-1961.
YANG Gang,ZHOU Biao,ZANG Chaoping. Fast response prediction method for bladed disks with contact interfaces[J].
Journal of Aerospace Power,2019,34(9):1953-1961.

able for large-scale non-linear bladed disk models with contact interfaces. Result showed that the response prediction based on the harmonic balance method was more than 400 times faster. Prevailing advantages in computational efficiency and accuracy were fully demonstrated by the simulation results. This can raise the potentiality of acting as a powerful tool for the design and optimization for various dry friction dampers.

Key words: bladed disks; response prediction; dry friction damping; model reduction; harmonic balance method (HBM)

航空发动机旋转叶片在气流激励下,极易产生由振动引发的高循环疲劳失效。干摩擦阻尼结构不受温度影响、结构相对简单、减振效果明显的特点,使其成为航空发动机上抑制叶片振动响应,并预防高循环疲劳失效的主要手段之一。然而,接触界面显著的非线性力学特征和复杂的相对运动行为,使得对各种干摩擦阻尼结构进行工程设计遇到困难。必须准确地预测含接触界面的叶盘结构的振动响应,才能够有效地指导各种干摩擦阻尼结构的设计。

含接触界面的叶盘结构大规模有限元模型的振动响应预测问题十分复杂。首先,有限元模型的节点数目庞大,特别是对于含干摩擦强非线性因素的叶盘结构,过大的模型规模必然对计算资源提出极高的要求,导致响应预测速率极低。其次,实际接触界面上的接触状态分布复杂,一般需要采用多个宏观接触单元来描述接触界面的微滑移运动。此时,含接触界面的叶盘模型的非线性自由度数目较大,导致非线性动力学方程的求解难度较高。

为此,国内外学术界纷纷开展了针对含接触界面的复杂叶盘响应预测方法的研究,发展了以谐波平衡法(harmonic balance method, HBM)为核心的考虑干摩擦效应的非线性响应计算方法。国际上, Laxalde 等^[1-3]通过模态减缩技术实现结构有限元模型的减缩,并采用动态拉格朗日法实现含接触界面的叶盘响应预测, Borrajo 等、Firrone 等、Zucca 等^[4-6]采用双线性模态技术实现有限元模型的减缩,通过加速的谐波平衡法实现含接触界面的叶盘响应的快速预测。Petrov 等^[7-9]将基于谐波平衡法的自由度压缩技术和高精度频响函数矩阵相结合,实现含接触界面的叶盘响应的快速预测。Zhang 等^[10]通过接触面等效刚度与阻尼来描述接触面复杂的接触力学特征,采用谐波平衡法得到简化缘板阻尼结构稳态振动响应。而国内其他针对含接触界面的叶盘的响应预测方法的研究多局限于小规模简单模型,且多

依托于商业有限元软件进行。上官博等^[11]通过集中参数模型计算了燕尾型叶根松装叶片系统参数对干摩擦减振效应的影响,徐强^[12]通过整体滑移模型描述干摩擦接触特性,计算了带干摩擦阻尼叶片的减振特性。总的来说,国际上的多个研究团队已形成了各具特色的含接触界面的叶片响应快速预测算法体系^[13-16]。而国内针对含接触界面的叶片响应预测方法仍有进一步深入研究的空间^[17-20]。

本文开展含接触界面的叶盘结构强迫振动响应的快速预测方法研究。首先,针对含接触界面的叶盘结构有限元模型,采用模态综合法大幅消减模型的计算规模;其次,采用谐波平衡法对减缩后的模型进行稳态响应预测;在此过程中,将前期研究工作中^[21]提出的雅可比矩阵加速技术进行拓展改进,形成了适用于含接触界面的大规模有限元模型的快速雅可比矩阵快速计算方法,显著加速非线性响应预测过程;最后,在带燕尾型榫根的叶盘结构有限元模型上,对响应快速预测方法的有效性和准确性进行验证。

1 含接触界面的叶盘结构建模方法

本节以带燕尾型榫根连接的叶盘结构为例,重点介绍含接触界面的叶盘模型的建立方法,为后续开展响应计算提供基础。

1.1 含接触界面的叶盘结构模型

叶片轮盘结构具有循环对称特性,仅需分析叶盘的单个扇区模型即可准确描述其振动特性。本文以某型压气机带燕尾型榫根连接的叶盘结构为研究对象,建立含接触界面的叶盘单扇区有限元模型,如图1所示。

该单扇区模型以带燕尾榫槽的简单圆盘来模拟实际轮盘结构。实际轮盘结构具有循环对称特性。为简化计算,本文仅在轮盘扇区边界面上施加固定约束,必要时后续计算可根据实际情况重新添加循环对称边界条件。叶片根部的锁紧装置

通过固定叶根四个边界节点来表示。沿叶盘周向的激振力施加节点在叶尖部位。燕尾型叶根与轮盘榫槽之间的接触界面布有 30 对点对点形式的离散的接触单元以描述接触界面上的复杂微滑移运动,接触对节点分布如图 1 中圆点所示。

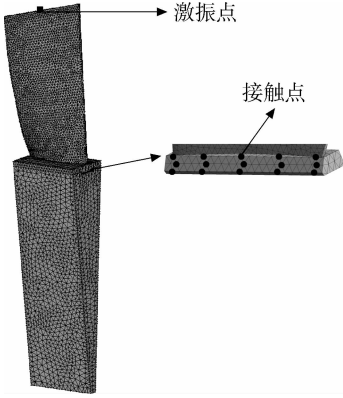


图 1 含接触界面的叶盘结构扇区有限元模型
Fig. 1 Finite element model of bladed disk sector with contact interface

1.2 接触单元建模方法

现有的干摩擦阻尼特性研究普遍采用一种考虑接触刚度的迟滞库伦摩擦模型来描述接触面的力学特征。基于迟滞库伦摩擦模型的三维变正压力接触模型如图 2 所示。其中 u, v 分别表示接触点间的切向和法向相对位移, k_t, k_n 分别表示切向和法向接触刚度, w 为初始位移, T 为切向干摩擦力, 下标 x, y 分别表示切向接触平面上的两个正交的坐标方向。

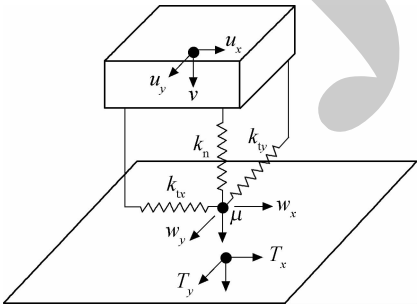


图 2 三维变正压力接触模型
Fig. 2 Three-dimensional contact model with variable normal load

运动过程中,接触节点间法向正压力 N 与法向相对位移 v 之间的关系为

$$N = \max(0, k_n v) \tag{1}$$

通常将 3D 迟滞库伦摩擦模型等效为两个正交的 2D 迟滞库伦摩擦模型,来模拟实际接触状

态。假设这两个相互正交的 2D 迟滞库伦摩擦模型分别沿 x, y 坐标方向,则等效后的法向正压力数值通过公式表示为

$$N^x = N^y = N \tag{2}$$

两个正交的 2D 迟滞库伦摩擦模型切向干摩擦力 T 均满足库伦摩擦定律,干摩擦力在各个接触状态下的大小为

$$\begin{cases} T_i = k_t(u_i - w_{0,i}) & \text{黏滞} \\ T_i = \text{sign}(\dot{u})\mu N & \text{滑移} \\ T_i = 0 & \text{分离} \end{cases} \tag{3}$$

其中下标 $i = x, y$ 表示接触平面的坐标方向, w_0 表示黏滞起始时刻的切向初始位移, $\dot{u}$ 为速度。

已知接触界面的切向接触刚度 k_t , 法向接触刚度 k_n 和摩擦因数 μ , 可采用轨迹跟踪法根据接触节点的相对位移时间历程 u 推导切向干摩擦非线性力 T 的步骤如下:

1) 初始状态选取。

切向干摩擦弹簧的伸长量用 $\mathbf{d} = [d_1, d_2, \dots, d_n]$ 表示, 其中 n 表示采样数目。为确保初值具有唯一性, 假设初始接触状态一直处于黏滞状态, 即初始切向干摩擦弹簧伸长量 $d_1 = u(t_1)$ 。

2) 轨迹跟踪法修正

假设时间步 t_i 到 t_{i+1} 之间的接触状态均为黏滞状态, 由此对 t_{i+1} 时刻的切向干摩擦力弹簧的变形进行预估

$$d'_{i+1} = [u(t_{i+1}) - u(t_i)] + d_i \tag{4}$$

根据库伦摩擦定律, 对接触状态判断, 并进行切向干摩擦力的修正

1) 如果 $|k_t d'_{i+1}| > \mu N$, 即 t_{i+1} 时刻接触节点实际处于滑移状态, 那么实际切向干摩擦弹簧变形为

$$d_{i+1} = \text{sign}(d'_{i+1})\mu N/k_t \tag{5}$$

2) 否则, t_{i+1} 时刻接触节点仍处于黏滞状态, 实际切向干摩擦弹簧变形等于预估值

$$d_{i+1} = d'_{i+1} \tag{6}$$

3) 循环

以步骤 1 为起点, 循环执行步骤 2, 通过轨迹跟踪法, 即可求得所有采样时刻下, 各个切向干摩擦弹簧伸长量的数值 $\mathbf{d}$ 。由此得到对应的切向干摩擦力

$$\mathbf{T} = k_t \mathbf{d} \tag{7}$$

含接触界面的叶盘模型参数在表 1 中给出。该模型的材料阻尼通过 β 阻尼的形式表示。

表 1 含接触界面的叶盘结构模型参数
Table 1 Parameters of the bladed disk sector with contact interface

参数	数据
弹性模量 $E/10^{11}$ Pa	2.1
泊松比 ν	0.3
材料密度 $\rho/(\text{kg}/\text{m}^3)$	7 980
阻尼系数 $\beta/10^{-5}$	1
切向接触刚度 $k_t/10^5$ (N/m)	1
法向接触刚度 $k_n/10^5$ (N/m)	1
摩擦因数 μ	0.3
榫槽底角 $\alpha/(\text{^\circ})$	60
激振力大小 f/N	1

2 含接触界面的叶盘结构响应快速预测方法

带燕尾型榫根接触界面的叶盘单扇区 (sector) 模型在外激励作用下, 其振动微分方程可写为

$$\mathbf{M}_{\text{sec}} \ddot{\mathbf{u}}_{\text{sec}} + \mathbf{C}_{\text{sec}} \dot{\mathbf{u}}_{\text{sec}} + \mathbf{K}_{\text{sec}} \mathbf{u}_{\text{sec}} + \mathbf{f}_{\text{nl, sec}} = \mathbf{f}_{\text{sec}} \sin(\omega t)$$
 (8)

其中 $\mathbf{u}_{\text{sec}}$ 、 $\dot{\mathbf{u}}_{\text{sec}}$ 、 $\ddot{\mathbf{u}}_{\text{sec}}$ 分别表示扇区结构的自由度的位移、速度和加速度。 $\mathbf{M}_{\text{sec}}$ 、 $\mathbf{C}_{\text{sec}}$ 、 $\mathbf{K}_{\text{sec}}$ 分别表示含接触界面的叶盘扇区的有限元模型中, 忽略所有接触单元后的底层线性模型的质量、阻尼和刚度矩阵。 $\mathbf{f}_{\text{nl, sec}}$ 表示扇区节点上施加的非线性干摩擦力, $\mathbf{f}_{\text{sec}} \sin(\omega t)$ 表示具有单一激振频率 ω 的外激振力。含接触界面的叶盘结构有限元模型规模庞大, 接触界面上的接触特征复杂, 均将导致通过直接求解振动微分方程 (式 (8)) 不可能实现。为此, 本文建立了含接触界面的叶盘结构响应快速计算方法。

2.1 基于模态综合法的模型减缩原理

模态综合法能够在保留模型中线性结构基本动力学特征的前提下, 有效减缩系统自由度。CB (craig bampton) 减缩属于模态综合法的一种。它在保留“主节点”的同时, 减缩所有非“主节点”自由度, 从而极大减小计算模型的规模。其中, “主节点”包括非线性接触节点、外力作用点和响应计算点。CB 减缩的关键要素是转换矩阵的构建:

$$\mathbf{R}_{\text{cb}} = [\boldsymbol{\Psi} \quad \boldsymbol{\Phi}]$$
 (9)

其中 $\boldsymbol{\Phi}$ 为常规模态矩阵, 表示“主节点”全部固定时的底层线性模型的模态; 当某一“主节点”上的自由度方向 j 具有单位位移 $u_m^j = 1$, 且其余所有“主节点”自由度方向的位移为零时, 结构所有自由度的静变形向量 $\boldsymbol{\varphi}^j$ 有 $\mathbf{K}_{\text{sec}} \boldsymbol{\varphi}^j = 0$ 。 $\boldsymbol{\varphi}^j$ 的集合即为约束模态 $\boldsymbol{\Psi}$ 。减缩前后的位移关系为

$$\mathbf{u}_{\text{sec}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_m \\ \mathbf{u}_s \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{\text{cb}} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_m \\ \boldsymbol{\eta}_s \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{\text{cb}} \mathbf{u}$$
 (10)

其中 $\mathbf{u}_m$ 表示系统“主节点”自由度上的位移, $\mathbf{u}_s$ 表示系统除“主节点”外的其他节点自由度的位移, $\boldsymbol{\eta}_s$ 表示 $\mathbf{u}_s$ 对应的模态坐标。减缩后的振动微分方程为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{f}_{\text{nl}} = \mathbf{f} \sin(\omega t)$$
 (11)

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{R}_{\text{cb}}^T \mathbf{M}_{\text{sec}} \mathbf{R}_{\text{cb}} \\ \mathbf{C} &= \mathbf{R}_{\text{cb}}^T \mathbf{C}_{\text{sec}} \mathbf{R}_{\text{cb}} \\ \mathbf{K} &= \mathbf{R}_{\text{cb}}^T \mathbf{K}_{\text{sec}} \mathbf{R}_{\text{cb}} \end{aligned}$$
 (12)

针对 CB 减缩后的计算模型, 可以采用时域或频域的计算方法进行响应预测。然而, 时域积分法针对大规模非线性模型的响应预测消耗的计算资源和时间过多, 不具备工程实用性。因此, 本文发展了以谐波平衡法为核心的考虑干摩擦效应的叶盘响应快速预测方法, 并采用时域积分法检验谐波平衡法的准确性。

2.2 谐波平衡法的基本原理

大多数非线性系统在周期激励下的位移解具有周期性, 能对其位移解进行傅里叶级数展开

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}^0 + \sum_{k=1}^{N_h} \mathbf{U}^{ck} \cos(k\omega t) + \mathbf{U}^{sk} \sin(k\omega t)$$
 (13)

其中 N_h 表示截取的谐波阶数, 上标 ck 为余弦谐波阶数, sk 为正弦谐波阶数, 将傅里叶系数归结为向量形式 $\mathbf{U} = [\mathbf{U}^0, \mathbf{U}^{c1}, \mathbf{U}^{s1}, \dots, \mathbf{U}^{cN_h}, \mathbf{U}^{sN_h}]^T$, 并定义系数转换矩阵

$$\mathbf{H}(t) = [\mathbf{I}, \cos(\omega t) \cdot \mathbf{I}, \sin(\omega t) \cdot \mathbf{I}, \dots, \cos(N_h \omega t) \cdot \mathbf{I}, \sin(N_h \omega t) \cdot \mathbf{I}]$$
 (14)

其中 $\mathbf{I}$ 表示 $N_d \times N_d$ 维单位矩阵, N_d 表示计算模型的自由度数, 则位移解 (式 (13)) 改写为

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{U}$$
 (15)

引入频域求导算子

$$\nabla = \text{diag}(\nabla_0, \nabla_1, \dots, \nabla_{N_h}), \nabla_k = k \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$
 (16)

则速度和位移向量与 $\mathbf{U}$ 的关系可写为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}(t) &= \omega \mathbf{H} \cdot \nabla \cdot \mathbf{U} \\ \ddot{\mathbf{u}}(t) &= \omega^2 \mathbf{H} \cdot \nabla^2 \cdot \mathbf{U}\end{aligned}\quad (17)$$

同理,外激振力与非线性力能够通过傅里叶级数展开表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{\text{nl}} &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{U}) \\ f \sin(\omega t) &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{F}\end{aligned}\quad (18)$$

其中 $\mathbf{F}_{\text{nl}}$ 表示非线性力的傅里叶系数向量, $\mathbf{F}$ 表示激振力的傅里叶系数向量。将式(15)~式(18)带入 CB 减缩后的振动微分方程(式(11)),并采用伽辽金法积分计算,消去与时间有关的量 $\mathbf{H}$,即得到由傅里叶系数向量表示的代数方程

$$\mathbf{G}(\omega, \mathbf{U}) = \mathbf{P}(\omega) \cdot \mathbf{U} + \mathbf{F}_{\text{nl}} - \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (19)$$

其中 $\mathbf{P}(\omega) = \mathbf{N}_m \omega^2 \nabla^2 + \mathbf{N}_c \omega \nabla + \mathbf{N}_k$, $\mathbf{N}_m$ 是一个分块对角矩阵 $\mathbf{N}_m = \text{diag}(\mathbf{M}, \mathbf{M}, \dots)$, $\mathbf{N}_k$ 、 $\mathbf{N}_c$ 的形式与 $\mathbf{N}_m$ 相同。通过牛顿-拉夫逊法求解非线性代数方程,即可得到频域响应解——位移的傅里叶系数向量 $\mathbf{U}$ 。

根据牛顿-拉夫逊法求解非线性代数方程的过程中,需要根据当前 $\mathbf{U}$ 预估非线性力的傅里叶系数向量 $\mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{U})$,从而构建代数方程(式(19))。基于离散傅里叶变换(discrete Fourier transform, DFT)和傅里叶逆变换傅里叶变换(inverse fast Fourier transform, IFFT)的时频转换技术(alternating frequency-time technique, AFT)能够快速实现这一预估计算,其步骤如图 3 所示。

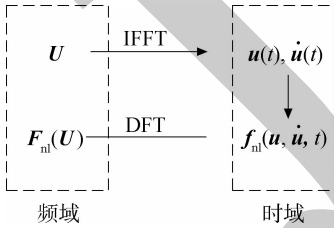


图 3 时频转换技术

Fig. 3 Alternating frequency-time technique

通过式(15)~式(17)由 $\mathbf{U}$ 转换出时域内的位移 $\mathbf{u}$ 、速度 $\dot{\mathbf{u}}$,再根据迟滞库伦摩擦模型转换得到时域上的非线性力 $\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t)$,最后通过 DFT 即可得到的非线性力的傅里叶系数向量 $\mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{U})$ 。

参考文献[22],对 CB 减缩后的含接触界面的叶盘有限元模型,仍可通过自由度压缩技术进一步减小模型的计算规模。然而,自由度压缩技术后续涉及复杂的矩阵求逆运算,在其综合作用下反而降低响应预测速率。因此,本文将直接应用谐波平衡法计算获取 CB 减缩模型的稳态响应。须重点指出,作者在前期工作中曾提出一种

雅可比矩阵快速计算方法,可有效提高谐波平衡法的计算效率。本文在此将其进行拓展和改进,使之形成适用于含接触界面的大规模有限元模型的快速雅可比矩阵快速计算方法,以加速基于谐波平衡法对 CB 减缩模型的响应预测过程。

2.3 快速雅可比矩阵快速计算方法

采用谐波平衡法进行响应预测过程中,耗时最长且最为关键的步骤对雅可比矩阵的计算。雅可比矩阵表示方程关于未知数的偏导数,针对本文的代数方程(式(19)),雅可比矩阵 $\mathbf{G}_U$ 形式为

$$\mathbf{G}_U = \frac{\partial \mathbf{G}(\omega, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{P}(\omega) + \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{P}(\omega) + \mathbf{F}_U \quad (20)$$

由于 $\mathbf{P}(\omega)$ 形式简单易得,雅可比矩阵的计算问题即转换为计算非线性力的傅里叶系数向量 $\mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{U})$ 关于位移的傅里叶系数向量 $\mathbf{U}$ 的偏导数矩阵 $\mathbf{F}_U$ 。

考虑到实际接触界面上的复杂接触特征,本文采用多个并联的宏观接触单元来描述接触界面的微滑移运动。每个宏观接触对分别用序号 $i = 1, 2, 3, \dots$ 表示。考虑到各个接触单元的运动相互独立,通过分别计算每一个宏观接触单元的对应的部分偏导数矩阵 $\mathbf{F}_U^i$,可最终合成整体偏导数矩阵 $\mathbf{F}_U$ 。

$$\mathbf{F}_U = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_U^1 & & & \\ & \mathbf{F}_U^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{F}_U^n \\ & & & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (21)$$

其中整体偏导数矩阵 $\mathbf{F}_U$ 最后一行表示的即为“主节点”中,除去非线性节点后对应的偏导数矩阵。与同一接触界面上的两个接触面分别定义为 Target 面和 Contact 面,并存在如下关系式:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{\text{nl}}^{\text{contact}} = -\mathbf{f}_{\text{nl}}^{\text{target}} = \tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}} \\ \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{\text{contact}} - \mathbf{u}^{\text{target}} \end{cases} \quad (22)$$

其中 $\mathbf{f}_{\text{nl}}^{\text{contact}}$ 、 $\mathbf{f}_{\text{nl}}^{\text{target}}$ 分别表示两个接触面上受到的非线性力, $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{B}[\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, v]^T$ 表示接触面上的接触节点间的相对位移, $\tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}} = \mathbf{Q}[T_x, T_y, N]^T$ 表示接触面上接触节点间的干摩擦非线性力。 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{Q}$ 均表示接触界面上的局部相对坐标系与全局坐标系之间的转换矩阵。最终每一个接触节点对上的部分偏导数矩阵 $\mathbf{F}_U^i$ 可以通过接触单元的偏导数矩阵 $\tilde{\mathbf{F}}_U$ 构建

$$\mathbf{F}_U^i = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{F}}_U\mathbf{B} & -\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{F}}_U\mathbf{B} \\ -\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{F}}_U\mathbf{B} & \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{F}}_U\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (23)$$

其中接触单元的偏导数矩阵 $\tilde{\mathbf{F}}_U$ 可参考作者前期研究工作^[21]获取,下面将该方法的核心过程进行简单回顾。

根据轨迹追踪法进行傅里叶变换的离散采样时,必然只能根据采样时刻判断接触状态的转换。然而实际接触状态转换时刻通常与采样时刻存在偏差,将干扰黏滞状态下干摩擦力数值的评估,并显著影响偏导数矩阵 $\tilde{\mathbf{F}}_U$ 的计算精度。

采用轨迹追踪法计算的某一正交方向上的切向干摩擦力,在各个接触状态下的大小

$$T = \begin{cases} k_t(u - w_0) & \text{黏滞} \\ \text{sign}(\dot{u})\mu k_n v & \text{滑移} \\ 0 & \text{分离} \end{cases} \quad (24)$$

接下来以滑移-黏滞接触状态转换为例,分析偏差产生的原因。令 t_0 表示计算中的滑移转黏滞的采样时刻, w_0 表示对应 t_0 时刻的切向初始位移数值。假设 t^* 表示接触节点相对运动过程中实际的滑移-黏滞转换时刻,且有 $t^* < t_0$, w^* 表示对应该时刻的切向初始位移数值,由此得到真实的切向干摩擦力数值,在各个接触状态下的大小

$$T_1 = \begin{cases} k_t(u - w^*) & \text{黏滞} \\ \text{sign}(\dot{u})\mu k_n v & \text{滑移} \\ 0 & \text{分离} \end{cases} \quad (25)$$

在 $[t^*, t_0]$ 时间段,真实的切向干摩擦力 T_1 (黏滞状态)与根据采样计算得到的切向干摩擦力 T (滑移状态)存在偏差,并且在接触节点相对运动时间历程中不断累积。注意到在 $t = t^*$ 时刻,该偏差为零,即有 $T(t^*) = T_1(t^*)$ 。那么在 $t = t_0$ 时刻,该累积偏差为

$$\epsilon = T(t_0) - T_1(t_0) = \text{sign}(\dot{u})\mu k_n v(t_0) - k_t[u(t_0) - w^*] \quad (26)$$

由于该偏差在后续黏滞状态 ($t > t_0$) 持续存在,可将因采样偏差导致的切向干摩擦力偏差表示为

$$T_2 = \epsilon \delta(t) \quad (27)$$

其中 $\delta(t)$ 表示覆盖后续黏滞状态时间段 ($t > t_0$) 的阶跃函数。由于 $T = T_1 + T_2$, 因此可将偏导数矩阵 $\tilde{\mathbf{F}}_U$ 进行如下拆分:

$$\tilde{\mathbf{F}}_U = \tilde{\mathbf{F}}_U^1 + \tilde{\mathbf{F}}_U^2 \quad (28)$$

其中 T_1 对应的偏导数矩阵 $\tilde{\mathbf{F}}_U^1$ 可根据 Joannin 等^[16]提出的雅可比矩阵解析表达式构建,只需要计算非线性干摩擦力 $\tilde{f}_{nl}$ 关于接触节点相对位移 $\tilde{u}$ 的偏导数即可。 T_2 对应的偏导数矩阵为

$$\tilde{\mathbf{F}}_U^2 = \frac{\partial [\text{DFT}[\epsilon \delta(t)]]}{\partial \mathbf{U}} = \text{DFT}[\delta(t)] \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{U}} \quad (29)$$

其中 DFT 表示离散傅里叶变换。而考虑到 t^* 时刻 w^* 为常数,结合傅里叶系数向量的转换公式 $u = \mathbf{H} \cdot \mathbf{U}$, 那么偏差 ϵ 关于 $\mathbf{U}$ 的偏导数向量为

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial \epsilon}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial \epsilon}{\partial u} \mathbf{H}(t_0) \quad (30)$$

通过式(20)~式(30)能够快速构建雅可比矩阵 $\mathbf{G}_U$, 从而极大地提高基于谐波平衡法进行响应预测的速率。此外,国际学术界中, Petrov 等^[7]和 Siewert 等^[15]亦分别提出了各具特色的雅可比矩阵加速计算方法。作者近期通过简单的结构算例证明^[23],与之相比,本文提出的快速雅可比矩阵快速计算方法具有独创性与良好的程序可实现性,并且在计算效率上最具优势。

3 含接触界面的叶盘振动响应分析

本节针对带燕尾型榫根接触面的叶盘结构模型,进行响应预测。

3.1 响应快速预测方法的加速效果

针对本文第 1 节中建立的含接触界面的叶盘结构有限元模型,首先采用 CB 减缩法降低计算模型规模,其结果如表 2 所示。

表 2 模型减缩前后的自由度
Table 2 Degrees of freedom before and after model reduction

模型	计算模型自由度个数	非线性自由度个数
原模型	22 143	180
CB 减缩模型	827	180

可以看出,减缩后的振动微分方程的自由度仅等于“主节点”自由度数加上截取的模态阶次数。本文截取结构前 20 阶模态信息进行减缩,最终将模型计算规模降低至原模型的 1/25 以下。

其次,针对减缩后的模型,采用谐波平衡法求解非线性响应,并根据本文第 2.5 节中介绍的快速雅可比矩阵快速计算方法,加速求解过程。

在采用谐波平衡法求解非线性响应过程中,通过设置未知量 $\mathbf{U}$ 的误差限作为迭代收敛条件,该误差限的数值可反映响应的计算精度。为了评估雅可比矩阵快速计算方法对叶盘结构响应预测过程的加速计算效果,表 3 列出了单个频率点下,获取其稳态响应振幅的平均计算时间与计算精度。结果表明,对于大规模有限元模型而言,基于雅可比矩阵解析表达式的快速计算方法能够有效规避非线性响应计算规模随着自由度数目增加而

呈现几何级数上升的问题。同时,该方法精确地提供当前迭代步中非线性方程的雅可比矩阵,解决了多维非线性代数方程求解过程中出现的收敛困难问题,提高计算的精度。最终,采用本文提出的快速雅可比矩阵快速计算方法,可将叶片响应预测计算效率提高 400 倍以上。

表 3 雅可比矩阵加速前后的计算结果

Table 3 Results before and after the fast calculation of Jacobian matrix

加速方法	计算时间 t/s	计算精度
未加速	99 870	1×10^{-4}
已加速(快速方法)	147.9	1×10^{-20}
已加速(Siewert 方法)	206.2	1×10^{-20}

此外,表 3 亦给出了 Siewert 等所提出的雅可比矩阵加速技术的加速效果。相较之下,本文针对含接触界面的大规模叶盘有限元模型所提出的快速雅可比矩阵快速计算方法在计算效率上仍具有显著的优势。

3.2 响应结果的准确性检验

首先考虑 CB 减缩对计算模型的影响。考虑到模型的复杂性,选取 20 阶模态进行 CB 减缩。减缩完成后,比较进行 CB 减缩前后的前 10 阶模态的动力学特性。结果表明,减缩后模型的前 10 阶频差小于 1%,且振型的模态置信准则(MAC)数值接近于 1。即减缩前后的模型动力学特性与原模型基本一致。

针对 CB 减缩后的计算模型,采用时域积分方法中的 Newmark(NMK)积分法,对谐波平衡法(HBM)的响应计算结果进行检验。通过谐波平衡法计算的响应幅频曲线如图 4 所示。对共振状态($\omega=1115 \text{ rad/s}$)下的响应结果在时域上进行检验,其结果如图 5 所示。可以看出,加速后的谐波平衡法对 CB 减缩模型的响应预测结果准确。

综上所述,本文建立的含接触界面的叶盘结构强迫振动响应快速预测方法准确性良好。

3.3 响应结果分析

3.3.1 激振力的影响

干摩擦接触面的力学行为具有强烈的非线性特性,其激振力水平对叶片的响应特性有着重要影响。图 6 表示某给定转速下,带燕尾榫根接触界面的叶尖响应曲线随激振力(f)的变化规律。可以看出,在低幅值的激励力作用下,叶根接触面

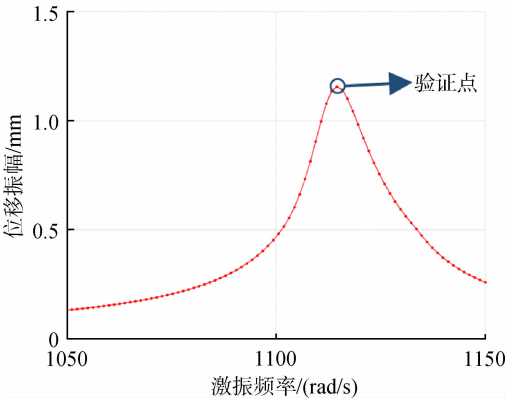


图 4 谐波平衡法计算的响应幅频曲线
Fig. 4 Amplitude-frequency curve by HBM

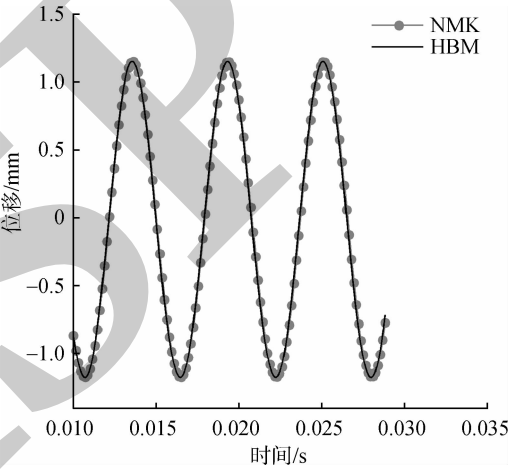


图 5 共振状态下的时域响应验证结果
Fig. 5 Validation of the resonant response in the time domain

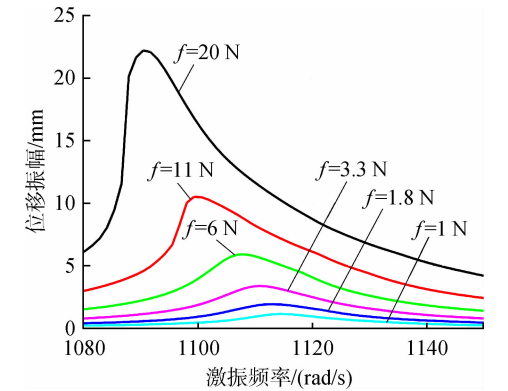


图 6 幅频曲线随激振力的变化
Fig. 6 Amplitude-frequency curve with varying exciting force

之间的相对运动幅度较小,接触面不存在相对滑动现象,近似处于完全黏滞状态,因而叶片振动峰值随激振力增加呈现线性变化趋势。当激振力逐

渐增大时,接触界面由全黏滞状态逐渐转化为黏滑过渡状态,由此产生的干摩擦阻尼效应将使得叶片的共振峰值向左偏移,并显著影响叶片振动幅值,导致叶片振动响应曲线呈现出明显的非线性特性。

3.3.2 叶盘转速的影响

航空发动机叶盘结构的高速转动使叶片受到较大离心力的作用。该离心力的数值大小决定了接触界面上的正压力分布状况,并进一步影响叶片的响应特性。图7给出了在给定激振力水平条件下 $f=1\text{ N}$,带燕尾榫根接触面叶片的响应随转速的变化规律,转速的大小通过在叶尖激振点施加等效离心力 p 来表示。可以看出,随着转速的逐渐增大,叶片响应的幅频曲线呈整体向右移动的趋势,同时峰值振幅水平逐渐增加。分析可知,当转速较小时,接触界面上正压力较小,将导致接触界面上出现较大的相对滑移,从而有效降低叶片振动幅值。而当转速继续增大时,叶片燕尾型榫槽上的接触面将逐渐以黏滞接触状态为主,其相对滑移的缺失将削弱干摩擦阻尼效应,叶片响应振幅随转速的增大而增大。

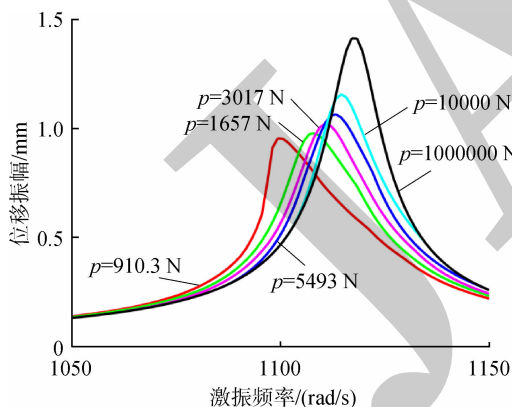


图7 幅频曲线随转速的变化

Fig. 7 Amplitude-frequency curve with varying rotation speed

4 结 论

本文实现了含接触界面的叶盘结构模型响应的快速准确预测。针对含燕尾型榫连接的叶盘结构有限元模型,首先采用CB减缩方法对线性结构模型实现降阶,将模型计算规模降低至原模型的1/25以下;其次,提炼形成了适用于含接触界面的大规模有限元模型的快速雅可比矩阵快速计算方法;最后,采用加速后的谐波平衡法对减缩模

型进行稳态响应预测,相比于加速前,其计算效率提高400倍以上。数值仿真结果表明,本文所提出的含接触界面的叶盘结构稳态响应快速预测方法的准确性良好,相对于国际学术界现有的同类响应预测方法,在程序可实现性和计算效率方面更具优势,可为后续开展各种类型干摩擦阻尼器的设计和优化工作提供强有力的工具。

参考文献:

- [1] LAXALDE D, THOUVEREZ F. Complex non-linear modal analysis for mechanical systems; Application to turbo-machinery bladings with friction interfaces[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 322(4): 1009-1025.
- [2] LAXALDE D, THOUVEREZ F, LOMBARD J P. Forced response analysis of integrally bladed disks with friction ring dampers[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2010, 132(1): 11-13.
- [3] LAXALDE D, PIERRE C. Modelling and analysis of multi-stage systems of mistuned bladed disks[J]. Computers and Structures, 2011, 89(3/4): 316-324.
- [4] BORRAJO J M, ZUCCA S, GOLA M M. Analytical formulation of the Jacobian matrix for non-linear calculation of the forced response of turbine blade assemblies with wedge friction dampers[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2006, 41(10): 1118-1127.
- [5] FIRRONE C M, ZUCCA S. Modelling friction contacts in structural dynamics and its application to turbine bladed disks[J]. Numerical Analysis Theory and Application, 2011, 57(4): 301-330.
- [6] ZUCCA S, EPUREANU B I. Bi-linear reduced-order models of structures with friction intermittent contacts[J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 77(3): 1055-1067.
- [7] PETROV E P, EWINS D J. Analytical formulation of friction interface elements for analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of bladed disks[J]. Journal of Turbomachinery, 2003, 125(2): 364-371.
- [8] PETROV E P. A sensitivity-based method for stochastic and uncertainty analyses of forced response for nonlinear structures with friction and gap interfaces[J]. Applied Mechanics and Materials, 2006, 5/6: 443-454.
- [9] PETROV E P. Method for sensitivity analysis of resonance forced response of bladed discs with nonlinear contact interfaces[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2009, 131(2): 1-10.
- [10] ZHANG D, FU J, ZHANG Q, et al. An effective numerical method for calculating nonlinear dynamics of structures with dry friction: application to predict the vibration response of blades with underplatform dampers[J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 88(1): 223-237.
- [11] 上官博, 刘雅琳, 徐自力. 燕尾型叶根松装叶片系统参数对干摩擦减振效应的影响[J]. 振动与冲击, 2012, 31(19): 180-182.

SHANG Guanbo, LIU Yalin, XU Zili. Effects of parameters of a blade system with loosely assembled dovetail attachment on dry friction damping[J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(19): 180-182. (in Chinese)

[12] 徐强. 准周期激励下带干摩擦阻尼叶片减振特性研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2016.

XU Qiang. Research on vibration characteristics of the blade disc with dry friction damper under quasi-periodic excitation[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2016. (in Chinese)

[13] YANG B D, CHU M L, MENQ C H. Stick-slip-separation analysis and non-linear stiffness and damping characterization of friction contacts having variable normal load[J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 210(4): 461-481.

[14] PETORV E P. Frequency-domain sensitivity analysis of stability of nonlinear vibrations for high-fidelity models of jointed structures[J]. Journal of Engineering for Gas Turbine and Power, 2017, 140(1): 1-13.

[15] SIEWERT C, PANNING L, Wallaschek J, et al. Multiharmonic forced response analysis of a turbine blading coupled by nonlinear contact forces[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2010, 132(8): 231-243.

[16] JOANNIN C, CHOUVION B, THOUVEREZ F, et al. A nonlinear component mode synthesis method for the computation of steady-state vibrations in non-conservative systems[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2016, 83: 75-92.

[17] 徐超, 李东武, 陈学前, 等. 考虑法向载荷变化的微滑摩擦系统振动分析[J]. 振动与冲击, 2017, 36(13): 122-127.

XU Chao, LI Dongwu, CHEN Xueqian, et al. Vibration analysis for a micro-slip frictional system considering variable normal load[J]. Journal of Vibration and Shock, 2017, 36(13): 122-127. (in Chinese)

[18] 刘天源, 谢永慧, 张荻. 干摩擦阻尼叶片的高保真有限元模型振动特性研究[J]. 噪声与振动控制, 2018, 38(增刊 1): 92-95.

LIU Tianyuan, XIE Yonghui, ZHANG Di. Investigation of vibration characteristics for dry friction damped blades with high-fidelity finite element model[J]. Noise and vibration control, 2018, 38(Suppl. 1): 92-95. (in Chinese)

[19] 李琳, 刘久周, 李超. 干摩擦阻尼器对宽频多阶次激励减振效果分析[J]. 航空动力学报, 2016, 31(9): 2171-2180.

LI Lin, LIU Jiuzhou, LI Chao. Analysis on damping effect of dry friction damper under wideband multi-harmonic excitation[J]. Journal of Aerospace Power, 2016, 31(9): 2171-2180. (in Chinese)

[20] 陈璐璐, 张大义, 文敏, 等. 带凸肩风扇叶片振动特性及设计方法研究[J]. 推进技术, 2015, 36(9): 1389-1394.

CHEN Lulu, ZHANG Dayi, WEN Min, et al. Dynamical effects of shrouds on fan blade vibration and its corresponding design method[J]. Journal of Propulsion Technology, 2015, 36(9): 1389-1394. (in Chinese)

[21] 阳刚, 周标, 臧朝平, 等. 缘板阻尼结构减振特性的影响因素分析[J]. 航空动力学报, 2019, 34(1): 115-124.

YANG Gang, ZHOU Biao, ZANG Chaoping, et al. Analysis of the effect factors on damping characteristics for underplatform dampers[J]. Journal of Aerospace Power, 2019, 34(1): 115-124. (in Chinese)

[22] 阳刚, 周标, 臧朝平. 带接触界面的叶片强迫振动响应快速预测方法[C]//中国航空学会第 19 届发动机结构强度与振动专业学术交流会议论文集. 江西, 南昌: 中国航空学会动力专业分会, 2018: 71-78.

[23] 阳刚. 含接触界面的叶盘结构建模及响应预测方法研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2019.

YANG Gang. Research on modeling and response prediction of blade disc structure with contact interface[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2019. (in Chinese)

(编辑: 李岩梅、张 雪)